I 함수의 극한과 연속

함수는 기원전 고대 바빌로니아 시대부터 20세기에 이르기까지 여러 단계의 변화를 거쳐 발달해 왔다. 18세기경부터 함수는 현재 우리에게 익숙한 뜻으로 사용되기 시작했다. 함수 기호 f는 오일러와 달랑베르가 처음 사용했고, 이후 코시와 푸리에가 함수의 극한과 연속을 엄밀하게 다루면서 함수는 수학의 발전과 통합에 큰 역할을 했다. 함수는 물리학, 공학 등의 학문뿐만 아니라 우리가 사용하는 전자 제품의 설계부터 작동까지 많은 분야에서 활용된다.

출처 • Eves, H.,『수학사』 • 우정호,『학교수학의 교육적 기초』 • 김남희 외 5인,『수학교육과정과 교재연구』

학습 목표

- 함수의 극한의 뜻과 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.
- 함수의 연속의 뜻과 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

- 이 단원을 시작하며 나의 학습 계획을 세우고, 학습해 가면서 나만의 포트폴리오를 만들어 보세요.

학습 계획 | 예 그날 배운 내용을 그날 복습하겠다.

포트폴리오 | ☐ 틀린 문제 해결 모음집 ☐ 모둠 발표 자료집 ☐ 수학 관련 기사 모음집

1 함수의 극한

계속 움직일까? 멈출까?

진자 운동 실험에서 한쪽 쇠구슬을 들어 올렸다가 놓으면 서로 충돌하면서 반대쪽 쇠구슬이 움직인다. 시간이 흐르면 이 운동은 어떻게 변할까? 과학 실험에서 우리는 시간의 흐름에 따라 어떤 상태가 안정된 상태로 접어드는 경우, 계속 진행되는 경우 등 여러 가지 현상을 관찰하게 된다. 함수의 극한을 이용하면 관찰하는 현상이 시간에 따라 어떻게 변할지 예측할 수 있다.

출처 두산백과사전 두피디아, 2016

준비 학습

●유리함수

자신 있음 ☐

복습 필요 ☐

1 다음 유리함수의 정의역을 구하시오.

(1) $y=\dfrac{3}{x-5}$ (2) $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$

●함수와 그래프

자신 있음 ☐

복습 필요 ☐

2 다음 함수의 그래프를 그리시오.

(1) $y=x-1$ (2) $y=x^2-2x$

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}$ (4) $y=-\sqrt{x}$

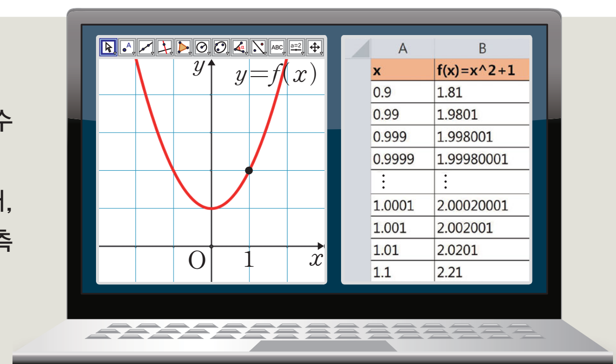
01 함수의 극한

학습 목표 • 함수의 극한의 뜻을 안다.

개념 1 함수의 극한이란 무엇일까?

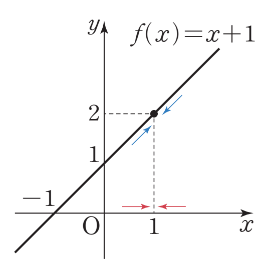
탐구하기

오른쪽 그림과 같이 컴퓨터 프로그램을 사용하여 함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프를 그리고, 표를 작성하였다. x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지게 될지 예측해 보자.



함수 $f(x)$에서 x의 값이 어떤 수에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 어떻게 변하는지 그래프를 통하여 알아보자.

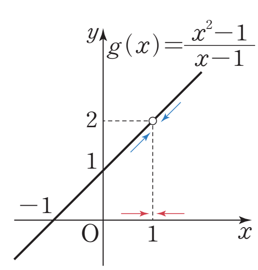
오른쪽 그림과 같은 함수 $f(x)=x+1$의 그래프에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



한편, 함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$에서 분모가 0이 되어 정의되지 않지만, $x\neq1$인 모든 실수 x에서

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=x+1$$

이다. 따라서 오른쪽 그림과 같은 함수 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$의 그래프에서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



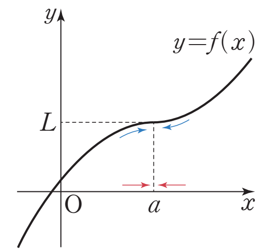
배웠어요! 고1
유리함수에서 정의역이 주어져 있지 않은 경우, 분모를 0으로 하는 x의 값을 제외한 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

- lim는 극한을 뜻하는 'limit'의 약자이다.
- $x \to a$는 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워짐을 뜻한다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 **수렴**한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=L \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to L$$

과 같이 나타낸다. 이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **극한값** 또는 **극한**이라고 한다.

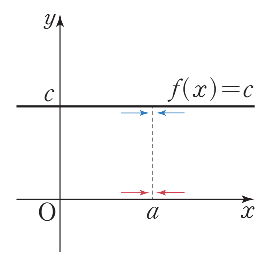


보기 함수 $f(x)=x+1$일 때 $\lim_{x \to 1}(x+1)=2$, 함수 $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$일 때 $\lim_{x \to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$

특히, 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)는 모든 실수 x에서 함숫값이 항상 c이므로 a의 값에 관계없이

$$\lim_{x \to a} f(x)=\lim_{x \to a} c=c$$

이다.



예제 1

다음 극한값을 함수의 그래프를 이용하여 구하시오.

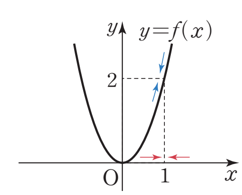
(1) $\lim_{x \to 1} 2x^2$ (2) $\lim_{x \to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

풀이 (1) $f(x)=2x^2$이라고 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to 1} 2x^2=2$$



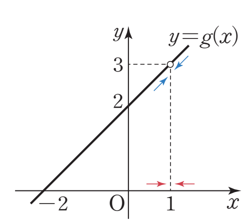
(2) $g(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$이라고 하면 $x \neq 1$인 모든 실수 x에서

$$g(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=x+2$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \to 1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=\lim_{x \to 1}(x+2)=3$$



답 (1) 2 (2) 3

문제 1 다음 극한값을 함수의 그래프를 이용하여 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to 1}(x-1)^2$

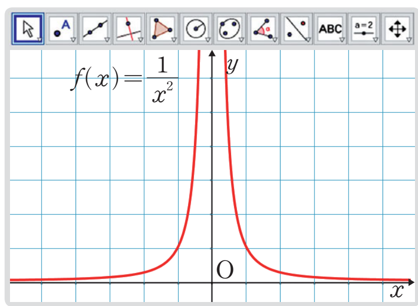
(2) $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$

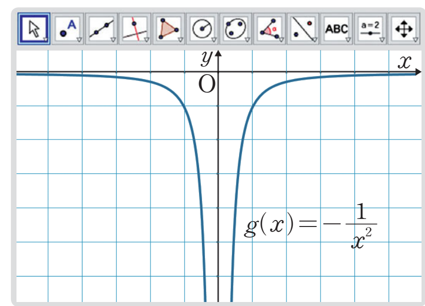
(3) $\lim\limits_{x \to 2}\sqrt{x+2}$

(4) $\lim\limits_{x \to 2}3$

함수 $f(x)$에서 x의 값이 어떤 수에 한없이 가까워질 때, $f(x)$가 수렴하지 않는 경우를 그래프를 통하여 알아보자.

두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$의 그래프는 각각 다음과 같다.





위의 그래프에서 x의 값이 0이 아니면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지고, $g(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다.

Q ∞는 수인가요?

A ∞는 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호이며, 수가 아니에요.

$f(x)$의 값이 한없이 커지는 것을 기호 ∞를 사용하여 $f(x) \to \infty$와 같이 나타낸다. 이때 기호 ∞를 **무한대**라고 읽는다. 또, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 것을 기호로 $f(x) \to -\infty$와 같이 나타낸다.

• $-\infty$는 음의 무한대라고 읽고, ∞는 양의 무한대라고도 읽는다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 **발산**한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \infty$$

와 같이 나타낸다.

또, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=-\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

• $\lim\limits_{x \to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)=-\infty$는 극한값이 ∞, $-\infty$라는 뜻이 아니다. 이때는 $x=a$에서의 극한값이 존재하지 않는다고 한다.

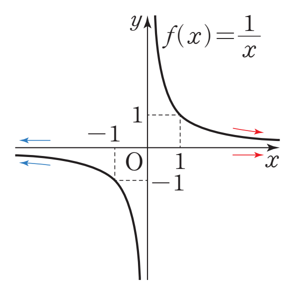
보기 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$일 때 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$, 함수 $g(x)=-\dfrac{1}{x^2}$일 때 $\lim\limits_{x \to 0}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\infty$

문제 2 다음 극한값이 존재하는지 조사하시오.

(1) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2}$ (2) $\lim_{x \to 2} \left\{-\frac{1}{(x-2)^2}\right\}$

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 어떻게 변하는지 그래프를 통하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같은 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커질 때 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때에도 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



여기서 x의 값이 한없이 커지는 것을 기호로 $x \longrightarrow \infty$와 같이 나타내고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 것을 기호로 $x \longrightarrow -\infty$와 같이 나타낸다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=L \quad \text{또는} \quad x \longrightarrow \infty \text{일 때 } f(x) \longrightarrow L$$

과 같이 나타낸다.

또한, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 M에 수렴한다고 하고, 이것을 기호로

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)=M \quad \text{또는} \quad x \longrightarrow -\infty \text{일 때 } f(x) \longrightarrow M$$

과 같이 나타낸다.

보기 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$일 때 $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}=0$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}=0$

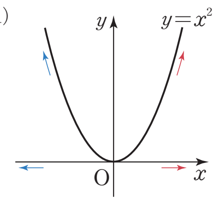
문제 3 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x+3}$ (2) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x}+2\right)$

한편, 함수 $f(x)$에서 $x \to \infty$ 또는 $x \to -\infty$일 때, $f(x)$의 값이 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하는 것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

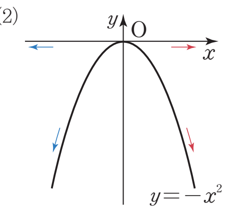
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

보기 (1)



$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^2 = \infty$

(2)



$\lim_{x \to \infty} (-x^2) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} (-x^2) = -\infty$

문제 4 다음 극한값이 존재하는지 조사하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty} (3x+5)$ (2) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{2-x}$

이야기 속 수학 **보일 법칙과 함수의 극한**

영국의 과학자 보일(Boyle, R., 1627~1691)은 일정한 온도에서 일정량의 기체의 부피 V는 압력 P에 반비례한다는 사실을 발견하였는데, 이를 보일 법칙이라고 한다. 보일 법칙에 따르면

$$V = \frac{k}{P} \ (k\text{는 상수})$$

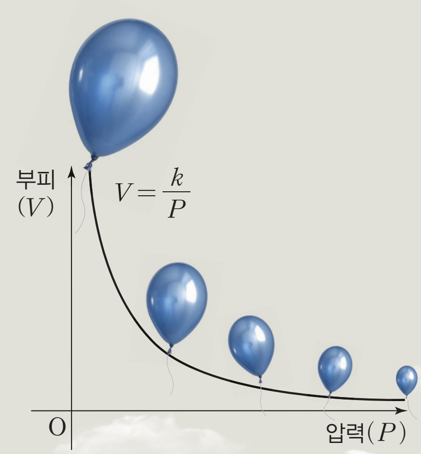
가 성립하므로 일정한 온도에서 기체의 압력 P에 대한 기체의 부피 V의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

수소를 넣은 풍선을 하늘에 띄우면 풍선이 높이 올라갈수록 점점 커지다가 결국 터진다. 그래프에서도 알 수 있듯이 압력 P가 점점 작아지면서 부피 V가 계속 커지기 때문이다.

한편 압력 P가 점점 커지면 어떻게 될까? 부피 V는 점점 작아져서 0에 가까워진다.

즉, $\lim_{P \to \infty} V = 0$이다.

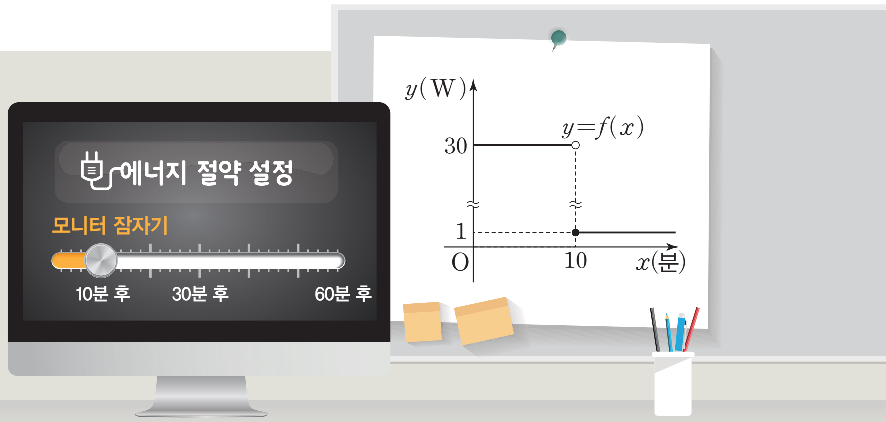
출처 Halliday 외 2인, 『일반물리학 제1권』



개념 2 함수의 우극한과 좌극한은 무엇일까?

생각 열기

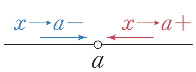
컴퓨터를 켜 놓은 채 아무런 작업을 하지 않고 10분이 지나면 전기 절약을 위해 자동으로 모니터의 화면이 꺼지도록 설정하였다. 오른쪽 그림은 작업을 중단한 지 x분 후의 모니터의 전력 사용량 $f(x)$ W를 나타낸 그래프이다. 물음에 답하여 보자.



1 x의 값이 10보다 크면서 10에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값을 구해 보자.

2 x의 값이 10보다 작으면서 10에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값을 구해 보자.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때와 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 각각 어떻게 변하는지 알아보자.

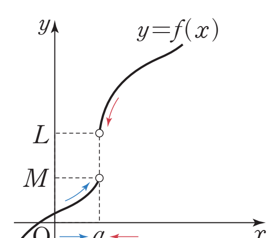


x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a+$와 같이 나타내고, x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a-$와 같이 나타낸다.

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지는 것을 기호로

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L$$

또는 $x \to a+$일 때 $f(x) \to L$



과 같이 나타내고, L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **우극한**이라고 한다.

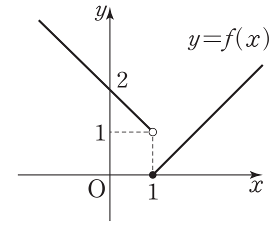
또한, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 M에 한없이 가까워지는 것을 기호로

$$\lim_{x \to a-} f(x) = M \quad \text{또는} \quad x \to a-\text{일 때 } f(x) \to M$$

과 같이 나타내고, M을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 **좌극한**이라고 한다.

보기 위의 **생각 열기**에서 함수 $f(x)$의 $x=10$에서의 우극한은 $\lim_{x \to 10+} f(x) = 1$, $x=10$에서의 좌극한은 $\lim_{x \to 10-} f(x) = 30$이다.

문제 5 함수 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\geq 1) \\ -x+2 & (x<1) \end{cases}$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음을 구하시오.



(1) $\lim_{x\to 1+} f(x)$　　　(2) $\lim_{x\to 1-} f(x)$

함수 $f(x)$에서 $\lim_{x\to a} f(x)=L$이면, $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값은 L로 서로 같다. 또, 그 역도 성립한다.

따라서 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \iff \lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=L$$

배웠어요! ········ 고1

명제 $p \longrightarrow q$와 그 역 $q \longrightarrow p$가 모두 참이면 이것을 기호로 $p \iff q$와 같이 나타내고, p는 q이기 위한 필요충분조건이라고 한다.

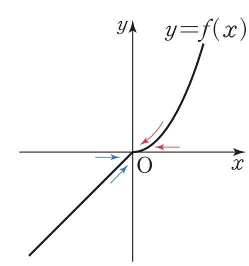
한편, $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한과 좌극한이 모두 존재하더라도 그 값이 서로 같지 않으면, 즉 $\lim_{x\to a+} f(x)\neq\lim_{x\to a-} f(x)$이면 극한값 $\lim_{x\to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

예제 2

다음 함수의 $x=0$에서의 극한값이 존재하는지 조사하시오.

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$　　　(2) $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$

풀이 (1) 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0) \\ x & (x<0) \end{cases}$ 의 $x=0$에서의 우극한과 좌극한을 각각 구하면

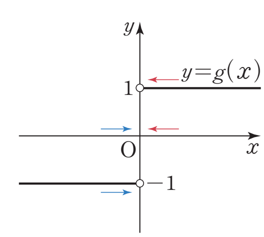


$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x^2=0$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} x=0$$

따라서 우극한과 좌극한이 모두 존재하고 그 값이 서로 같으므로 극한값 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재한다.

(2) 함수 $g(x)=\dfrac{|x|}{x}$의 $x=0$에서의 우극한과 좌극한을 각각 구하면



$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} \frac{x}{x}=\lim_{x\to 0+} 1=1$$

$$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0-} (-1)=-1$$

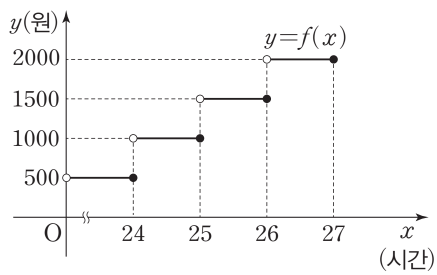
따라서 우극한과 좌극한이 모두 존재하지만 그 값이 서로 같지 않으므로 극한값 $\lim_{x\to 0} g(x)$는 존재하지 않는다.

답 (1) 존재한다.　(2) 존재하지 않는다.

문제 6 다음 극한값이 존재하는지 조사하시오.

(1) $\lim_{x \to 0} x|x|$　　　　(2) $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$

생활 속 **문제 7** 어느 도시에서는 친환경 교통수단으로 녹색 자전거 대여 서비스를 운영하고 있다. 이 도시에서 녹색 자전거를 x시간 대여했을 때의 요금을 $f(x)$원이라고 하자. 함수 $f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, 그래프를 보고 $\lim_{x \to 25+} f(x)$의 값을 구하시오.



녹색 자전거 이용 안내

이용 요금

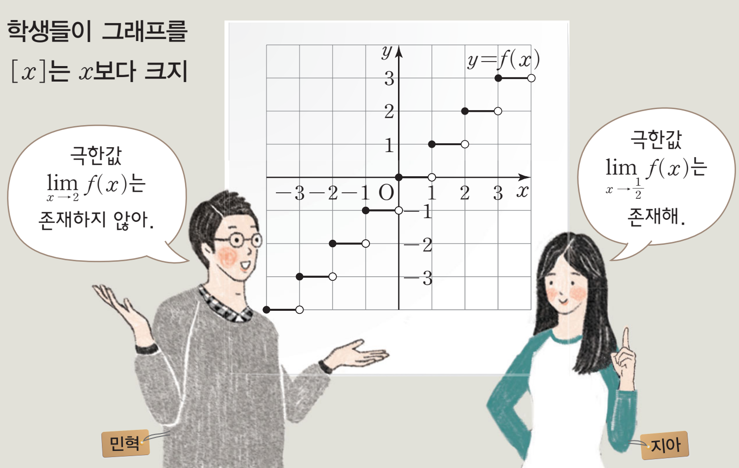
구분	대여 시간	요금
기본 요금	24시간 이내	500원
추가 요금	24시간 초과 시 1시간당	500원

생각과 표현　문제 해결 | 추론 | 창의 · 융합 | 의사소통

오른쪽 그림은 함수 $f(x)=[x]$의 그래프이다. 학생들이 그래프를 보고 나눈 대화를 보고 물음에 답하여 보자. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

1 민혁이와 지아가 한 말이 맞는지 확인해 보자.

2 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재하는 a의 값의 조건을 말하여 보자.



02 함수의 극한에 대한 성질

학습 목표 • 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 함수의 극한값을 구할 수 있다.

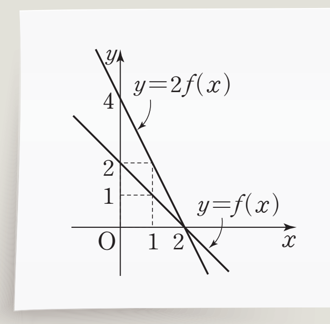
개념 1 함수의 극한에는 어떤 성질이 있을까?

탐구하기

오른쪽 그림은 $f(x)=-x+2$일 때, 함수

$y=f(x)$, $y=2f(x)$

의 그래프를 그린 것이다. 물음에 답하여 보자.



1 $\lim_{x\to1} f(x)$, $\lim_{x\to1} 2f(x)$의 값을 각각 구해 보자.

2 $\lim_{x\to1} 2f(x)=2\lim_{x\to1} f(x)$가 성립하는지 확인해 보자.

함수 $f(x)=x$, $g(x)=x+1$에서

$$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1} x=1$$

$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}(x+1)=2$$

이므로

$$\lim_{x\to1} f(x)+\lim_{x\to1} g(x)=1+2=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{x\to1} f(x)\times\lim_{x\to1} g(x)=1\times2=2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

이다. 한편,

$$f(x)+g(x)=x+(x+1)=2x+1$$

$$f(x)g(x)=x(x+1)=x^2+x$$

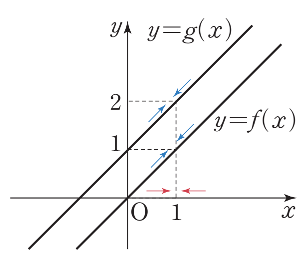
이므로

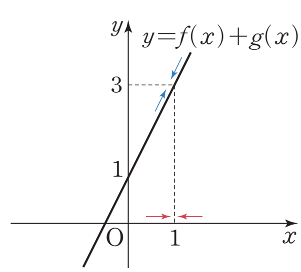
$$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1}(2x+1)$$

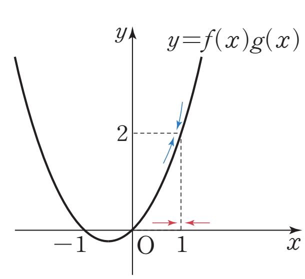
$$=3 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

$$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=\lim_{x\to1}(x^2+x)=2 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

이다.







따라서 ㉠과 ㉢, ㉡과 ㉣로부터

$$\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1}f(x)+\lim_{x\to 1}g(x)$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=\lim_{x\to 1}f(x)\times\lim_{x\to 1}g(x)$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$, $g(x)$의 $x=a$에서의 극한값이 존재할 때, 다음과 같은 성질이 성립한다.

● 함수의 극한에 대한 성질은 $x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to -\infty$ 일 때에도 모두 성립한다.

함수의 극한에 대한 성질

함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x\to a}f(x)=L$, $\lim_{x\to a}g(x)=M$ (L, M은 실수)일 때

1. $\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)=cL$ (단, c는 상수)

2. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=L+M$

3. $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)-\lim_{x\to a}g(x)=L-M$

4. $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=LM$

5. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (단, $M\neq 0$)

보기 a가 실수일 때 $\lim_{x\to a}x=a$, $\lim_{x\to a}c=c$ (c는 상수)이므로

함수의 극한에 대한 성질을 이용하면

(1) $\lim_{x\to 1}(x^2+2x-1)=\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}2x-\lim_{x\to 1}1=\lim_{x\to 1}x\times\lim_{x\to 1}x+2\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}1$

$=1\times1+2\times1-1=2$

(2) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x+2}{3x-1}=\dfrac{\lim_{x\to -1}(x+2)}{\lim_{x\to -1}(3x-1)}=\dfrac{\lim_{x\to -1}x+\lim_{x\to -1}2}{3\lim_{x\to -1}x-\lim_{x\to -1}1}=\dfrac{-1+2}{3\times(-1)-1}=-\dfrac{1}{4}$

문제 1 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to 2}(x^2+x)$ (2) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+1}{x+1}$

문제 2 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x-1}\right)$ (2) $\lim_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2}{x+2}+2\right)$

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구해 보자.

예제 1

다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$　　　(2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

풀이 (1) 분자를 인수분해하여 약분하면

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6$$

(2) 분모, 분자에 $\sqrt{x}+2$를 각각 곱하여 분자를 유리화하면

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

답 (1) 6　(2) $\dfrac{1}{4}$

● 분모 또는 분자를 인수분해하여 약분한다.

● 근호가 들어 있는 부분을 유리화한다.

배웠어요! ········· 중3

$a \neq b$일 때

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$$

문제 3 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$　　　(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

예제 2

극한값 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2+x+1}$을 구하시오.

풀이 분모에서 차수가 가장 큰 항 x^2으로 분모, 분자를 각각 나누면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2-1}{x^2+x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = 2$$

답 2

● 분모에서 차수가 가장 큰 항으로 분모, 분자를 각각 나눈다.

문제 4 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+x}{2x^2+2}$　　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2-x+1}{-x^2+2x}$

예제 3

극한값 $\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$를 구하시오.

풀이 분모를 1로 생각하고 분모, 분자에 $\sqrt{x^2+2x}+x$를 각각 곱하여 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+2x}-x) &= \lim_{x \to \infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}\\ &= \lim_{x \to \infty}\frac{(x^2+2x)-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}\\ &= \lim_{x \to \infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}\\ &= \lim_{x \to \infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\\ &= 1\end{aligned}$$

답 1

문제 5 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

(2) $\lim_{x \to \infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$에서 $\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ (L은 실수)이고, $\lim_{x \to a}g(x)=0$이면 함수의 극한에 대한 성질에 따라

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a}f(x) &= \lim_{x \to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\times g(x)\right\}\\ &= \lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}\times\lim_{x \to a}g(x)\\ &= L\times 0=0\end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{x \to a}f(x)=0$$

이다.

이를 이용하여 함수의 극한에 대한 문제를 해결해 보자.

예제 4

등식 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$가 성립하도록 상수 a, b의 값을 각각 정하시오.

● $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재하고 $x\to a$일 때, $g(x)\to0$이면 $f(x)\to0$이다.

풀이 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$이고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$이다.

즉, $1+a+b=0$에서 $b=-a-1$ ...... ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+1+a)=a+2\end{aligned}$$

$a+2=5$이므로 $a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면 $b=-4$

답 $a=3$, $b=-4$

문제 6 다음 등식이 성립하도록 상수 a, b의 값을 각각 정하시오.

(1) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+ax+b}{x+1}=1$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1}=\sqrt{2}$

생각과 표현 문제 해결 | 추론 | 창의 · 융합 | 의사소통

가인이는 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$의 값을 다음과 같이 구하고 있다. 가인이의 풀이에서 잘못된 부분을 찾고, 극한값을 구할 때 주의할 점을 친구들과 이야기해 보자.

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to\infty}f(x)-\lim_{x\to\infty}g(x)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)&=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+4x}-\lim_{x\to\infty}x\\&=\infty-\infty\end{aligned}$$

개념 2 함수의 극한에서 대소 관계는 어떠할까?

함수의 극한에서는 다음과 같은 대소 관계가 성립한다.

● 함수의 극한의 대소 관계는 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ 일 때에도 성립한다.

함수의 극한의 대소 관계

함수 $f(x)$, $g(x)$에서 $\lim_{x \to a} f(x)=L$, $\lim_{x \to a} g(x)=M$ (L, M은 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x에서

1. $f(x) \le g(x)$이면 $L \le M$

2. 함수 $h(x)$가 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $L=M$이면

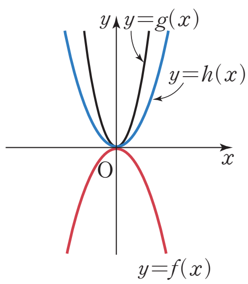
$$\lim_{x \to a} h(x)=L$$

참고 함수의 극한의 대소 관계는 함수의 대소에서 등호가 없을 때에도 성립한다. 예를 들어 함수 $f(x)=-x^2$, $g(x)=2x^2$이면 0에 가까운 모든 실수 x에서 $f(x)<g(x)$이지만

$$\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} g(x)=0$$

또, 함수 $h(x)=x^2$이면 0에 가까운 모든 실수 x에서 $f(x)<h(x)<g(x)$이지만 $\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} g(x)=0$이므로

$$\lim_{x \to 0} h(x)=0$$



예제 5

모든 실수 x에서 함수 $f(x)$가

$$2x+1 \le f(x) \le x^2+2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값을 구하시오.

풀이 모든 실수 x에서 $2x+1 \le f(x) \le x^2+2$이고

$$\lim_{x \to 1}(2x+1)=3,\ \lim_{x \to 1}(x^2+2)=3$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 따라

$$\lim_{x \to 1} f(x)=3$$

답 3

문제 7 모든 양의 실수 x에서 함수 $f(x)$가 다음 부등식을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값을 구하시오.

$$\frac{x^2+x+1}{2x^2} \le f(x) \le \frac{x^2+2x+3}{2x^2}$$

수학 들여다 보기

여러 가지 방법으로 함수의 극한값 확인하기

난이도 하 **중** 상

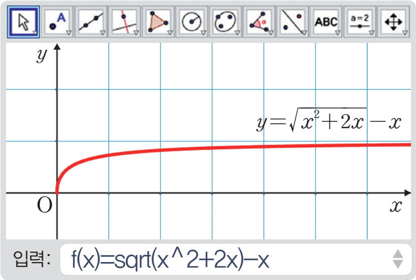
예제 3에서 계산한 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=1$을 다음 두 가지 방법으로 확인해 보자.

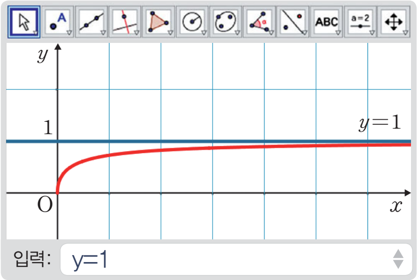
활동 ① 함수의 그래프로 확인하기(컴퓨터 프로그램 사용)

① 입력 창에 'f(x)=sqrt(x^2+2x)−x'를 입력하여 함수 $y=\sqrt{x^2+2x}-x$의 그래프를 그린다.

② 입력 창에 'y=1'을 입력하여 직선 $y=1$을 그린다.

③ 함수 $y=\sqrt{x^2+2x}-x$의 그래프는 x의 값이 커질수록 직선 $y=1$에 가까워지고 있다.
즉, $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)=1$인 것을 확인할 수 있다.





활동 ② 함숫값으로 확인하기(스프레드시트 사용)

① A열에 x의 값 1, 10, 100, …을 차례로 입력한다.

② B1셀에 '=sqrt(A1^2+2*A1)−A1'을 입력한다.

③ B1셀을 **'채우기 핸들'**을 이용하여 아래로 끌면 A열의 x에서의 $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-x$의 값이 차례로 나타난다.

④ x의 값이 커질수록 $\sqrt{x^2+2x}-x$의 값은 1에 가까워지는 것을 확인할 수 있다.

	A	B
1	1	0.732050808
2	10	0.95445115
3	100	0.995049384
4	1000	0.999500499
5	10000	0.999950005
6	100000	0.999995
7	1000000	0.9999995
8	10000000	0.99999995

탐구 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$의 값을 직접 구하고, 그 결과를 여러 가지 방법으로 확인해 보자.

자신감을 키우는 확인 학습 문제

1 함수의 극한

함수 $f(x)$에서 $x \to a$일 때

(1) $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한값 또는 극한이라고 한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

(2) $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하고, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 한다.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,\ \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

2 함수의 우극한과 좌극한

(1) $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = L$일 때, L을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 우극한이라고 한다.

(2) $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = M$일 때, M을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한이라고 한다.

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = L$

3 함수의 극한에 대한 성질

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L,\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ (L, M은 실수)일 때

(1) $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c\lim\limits_{x \to a} f(x) = cL$ (단, c는 상수)

(2) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
$= L + M$

(3) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x)-g(x)\} = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
$= L - M$

(4) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x) = LM$

(5) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ (단, $M \neq 0$)

바탕 다지기

01 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to 2} (4x+2)$

(2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x+3}$

(4) $\lim\limits_{x \to 0} 3$

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x^2}$

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)$

02 다음 극한값이 존재하는지 조사하시오.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} (-2x^2)$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5}{x^2}$

03 함수 $f(x)$, $g(x)$에서

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3,\ \lim_{x \to 1} g(x) = -2$$

일 때, 다음 극한값을 구하시오.

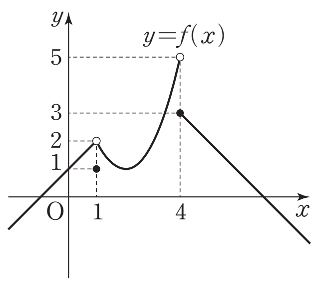
(1) $\lim\limits_{x \to 1} \{f(x)+g(x)\}$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \{2f(x)-3g(x)\}$

(3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)g(x)$

기본 익히기

04 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음을 구하시오.



(1) $\lim_{x\to1+}f(x)$ (2) $\lim_{x\to1-}f(x)$

(3) $\lim_{x\to4+}f(x)$ (4) $\lim_{x\to4-}f(x)$

(5) $\lim_{x\to1}f(x)$ (6) $\lim_{x\to4}f(x)$

05 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

(2) $\lim_{x\to-1}\dfrac{x^2-3x-4}{x+1}$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

(4) $\lim_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$

06 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x+2}{x^2+3}$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-2x}{x^2+1}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7x}-x)$

(4) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})$

07 함수 $f(x)$에서 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2$일 때, $\lim_{x\to0}\dfrac{x+f(x)}{x-f(x)}$의 값을 구하시오.

08 다음 등식이 성립하도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(1) $\lim_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$

(2) $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+a}-b}{x-1}=\dfrac{1}{2}$

09 $x>0$일 때, $5x-1<f(x)<5x+1$을 만족시키는 함수 $f(x)$에서 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$의 값을 구하시오.

10 옴의 법칙에 따르면 전기 회로에 흐르는 전류의 세기 I는 전기 회로에 걸리는 전압 V에 정비례하고 저항 R에 반비례하며 다음 식을 만족시킨다.

$$I=\frac{V}{R}$$

V가 일정하고 $R\to\infty$일 때, I의 극한값을 구하시오. 출처 Halliday 외 2인, 『일반물리학 제2권』

정답 및 해설 158쪽

11 다음은 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$$

일 때, $x=1$에서의 극한값이 존재하는지 조사하는 과정이다. □ 안에 알맞은 것을 써넣으시오.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$$
$$=\begin{cases} \boxed{\quad\quad} & (x>1) \\ -x-1 & (x<1) \end{cases}$$

이므로

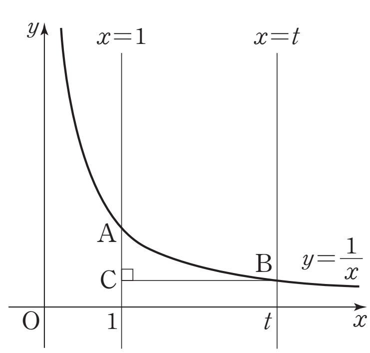
$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\boxed{\quad}$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\boxed{\quad}$$

따라서 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 극한값은 $\boxed{\quad\quad\quad}$.

실력 키우기

12 다음 그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{x}\,(x>0)$과 두 직선 $x=1$, $x=t$의 교점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 직선 $x=1$에 내린 수선의 발을 C라고 하자.

이때 $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$의 값을 구하시오. (단, $t>1$)



13 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x^3}{x^2}=2$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3$

생각 톡!톡!

14 찬열이는 다음 내용이 항상 맞다고 주장한다. 찬열이의 주장이 참이 아님을 예를 들어 설명해 보자.

찬열이의 주장

함수 $f(x)$, $g(x)$에서

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$$

이면 극한값 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$가 존재한다.

예를 들어
$f(x)=x^2+1$, $g(x)=2x^2$이면
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{2}$이니까
위 내용은 맞아.

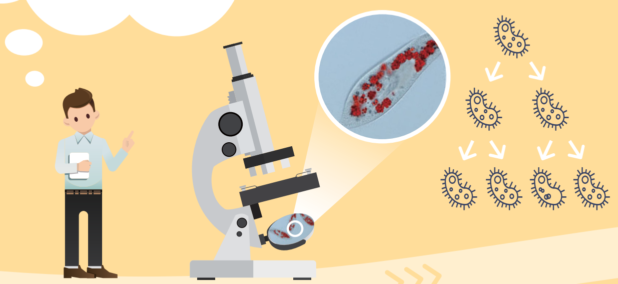
생각을 넓히는 수학

짚신벌레에게 무한한 시간을 준다면? 창의 융합

생활 주변의 현상이나 과학적인 현상 중에는 시간에 따라 그 값이 무한히 증가하거나 일정한 값에 가까워질 것으로 예상되는 현상이 있다. 이때 함수의 극한을 이용하면 이러한 현상이 어떻게 변할지 예측할 수 있다. 다음은 어느 모둠에서 발표한 '짚신벌레 개체 수의 극한' 발표 자료의 일부이다.

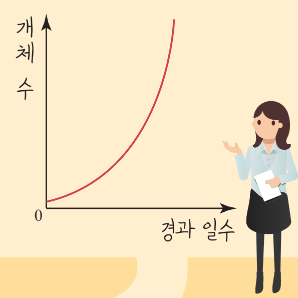
무한히 증가하는 것이 있을까?

단세포 생물인 짚신벌레는 빠르게 분열하여 다음 세대를 만들 수 있다.



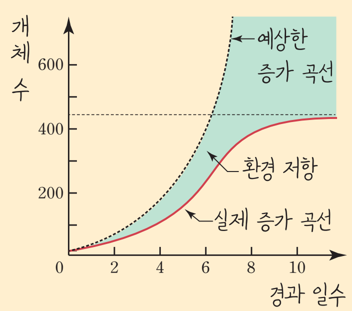
짚신벌레에게 무한한 시간을 준다면?

짚신벌레의 개체 수는 시간이 지날수록 무한히 증가할 것이다.



실제 짚신벌레의 생장 곡선

짚신벌레의 개체 수를 시간에 따라 측정한 그래프는 아래와 같다.



관찰 결과의 해석

우리 모둠의 예상

짚신벌레의 개체 수는 무한히 증가한다.

결과

일정한 수에 수렴한다.

출처 윤소영, 『교실 밖 생물여행』

탐구 위와 같이 우리 주변에서 함수의 극한으로 설명할 수 있는 상황을 찾아 그 내용을 발표 자료로 만들고, 모둠별로 발표해 보자.